1^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται η ευθεία ε: Αx+Βy+Γ=0 με $B \neq 0$ και το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$.

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος**.

α) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνονται από την εξίσωση $y = \lambda \cdot x$

Μονάδες 2

β) Το διάνυσμα $\vec{n}$=(-Α, Β) είναι κάθετο στην ευθεία ε: Αx+Βy+Γ=0.

Μονάδες 2

γ) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

Α3.α. Δίνονται τα σημεία Ε' και Ε εντός επιπέδου.
Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες Ε' και Ε.

Μονάδες 4

β. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2p \cdot x$.
Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Μονάδες 3

γ. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{5}{8}\vec{\alpha}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

Β3. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Μονάδες 7

Β4. Αν το διάνυσμα $\vec{\nu}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-\kappa\cdot\vec{\beta},\ \kappa\in\Re$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$, να βρείτε την τιμή του κ.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία Α(1, 3), Β(-2, 2) και η ευθεία ε: $3x+y+\alpha=0$ όπου $\alpha\in\Re$.

Γ1. Αν η απόσταση του Α από το Β είναι ίση με την απόσταση του Α από την ευθεία ε, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 9

Γ2. Για την τιμή α=4 να βρείτε:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία Α, Β και το σημείο Γ που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y’y.

Μονάδες 8

β) Ποιο σημείο της ευθείας ε έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή Ο των αξόνων.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω τα σημεία Α(-1, ψ) και Β(2x, ψ) με $x,\psi\in\Re$ του καρτεσιανού επιπέδου Οxψ.

Δ1. Αν είναι $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ (x, ψ) ανήκουν στην παραβολή C_1:$\psi^2=2x$, της οποίας να βρείτε την εστία Ε και την διευθετούσα δ.

Μονάδες 6

Δ2. Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2=15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ (x, ψ) ανήκουν στο κύκλο C_2:$x^2+\psi^2=3$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα κοινά σημεία των C_1 και C_2 είναι το Κ (1, $\sqrt{2}$) και το Λ(1, -$\sqrt{2}$).

Μονάδες 7

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο Κ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του C_2 στο Λ.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α2. **α)** Λ

β) Λ

γ) Σ

Α3. α) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

β) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

γ) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\ \vec{\beta}=\vec{\alpha}(\frac{5}{8}\vec{\alpha})=\frac{5}{8}\vec{\alpha}^2=\frac{5}{8}|\vec{\alpha}|^2=\frac{5}{8}4^2=10$

Β2. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{10}{4\cdot 5}=\frac{1}{2}$ άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$

Β3. $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=...=21$ άρα $|\vec{u}|=\sqrt{21}$

Β4. $\vec{v}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow[(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}]\cdot\vec{\beta}=0\rightarrow\kappa=4$

ΘΕΜΑ Γ:

α. Είναι d(A, B)=d(A, E) ή

$\sqrt{9+1}=\frac{|3\cdot 1+1\cdot 3+\alpha|}{\sqrt{3^2+12}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|6+\alpha|=10\Leftrightarrow\alpha=4$ ή α=-16.

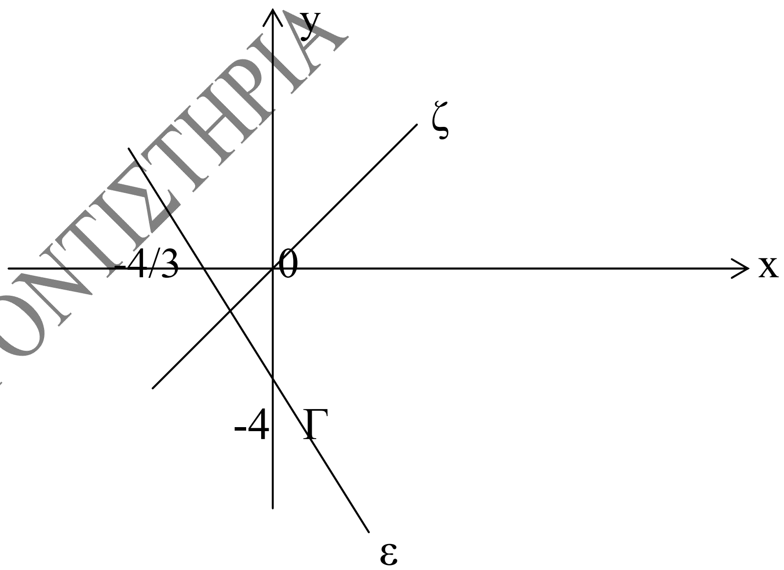
β. ε: 3x+y+4=0. Η ε τέμνει y΄y όταν x=0 δηλαδή y=-4. Άρα Γ(0, -4)

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,-1)\\ \overrightarrow{A\Gamma}=(-1,-7)\end{array}\right|\cdot\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=21-1=20$

Άρα (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}\cdot 20=10$ τ. μον.

γ.



Φέρνουμε την ζ $\perp$ στην ε που διέρχεται από το Ο ζ:y=λx

Επειδή $\zeta \perp \varepsilon$ είναι $\left.\begin{matrix}\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \\ \lambda_\varepsilon = -3\end{matrix}\right\} \to \lambda_\zeta = \frac{1}{3}$

Οπότε $\zeta : y = \frac{1}{3}x$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \to y = \frac{1}{3}(-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{5} \\ 3x + \frac{1}{3}x + 4 = 0 \to x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Άρα $\Delta(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$

ΘΕΜΑ Δ:

Α. $\overrightarrow{OA} = (-1, y), \overrightarrow{OB} = (2x, y)$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ άρα $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x, (p = 1), E(\frac{1}{2}, 0), \delta : x = -\frac{1}{2}$

Β. $3\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 = 15 \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 15 \Leftrightarrow 3(\sqrt{1 + y^2})^2 + (\sqrt{4x^2 + y^2})^2 = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$

Κύκλος με κέντρο Κ(0, 0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

Γ. Λύνουμε το σύστημα $\left.\begin{matrix} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 1 \text{ ή } x = -3 (\text{Απορρ.}) \\ y = \sqrt{2} \text{ ή } y = -\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$

Κ(1, $\sqrt{2}$), Λ(1, -$\sqrt{2}$)

Δ. Εφαπτομένη της C_1 στο Κ: $y\sqrt{2} = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Εφαπτομένη ης C_2 στο Λ: $x \cdot 1 + y(-\sqrt{2}) = 3 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Είναι παράλληλες γιατί έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.